РЕКОМЕНДОВАНО
школьным методическим объединением
учителей математики и информатики
ГАОУ СО «Гимназия № 1»
протокол № 4 от «01» апреля 2025г.
Руководитель МО
_____________________ И.В. Гришина

Реализация внутрипредметных связей в математике

Автор работы
Распарин Владимир Николаевич,
учитель математики высшей категории

г. Саратов

Содержание

Введение

Если поставлена цель решить конкретную математическую задачу, то обычно выбирается такой метод её решения, который решающему представляется наиболее целесообразным и быстрее приводит к цели. Чаще используется тот метод, которым лучше владеет этот решающий. Во многих случаях просто разрабатывается первая пришедшая идея решения.

Важно не только решить задачу, но решить её наиболее рациональным способом. При имеющихся нескольких способов решения данной задачи нетрудно выделить лучшие из них, оценить их. Споры о преимуществах того или иного метода решения являются беспредметными, если рассматривать эти методы без применения к конкретной задаче. Один и тот же метод может оказаться очень эффективным или же совсем слабым в применении его к решению разных задач. Суждение о простоте или трудности того или иного решения в значительной мере субъективно. Оно существенно зависит от степени подготовленности, от уровня владения материалом.

На примере демонстрации решения двух геометрических и одной алгебраической задач мы попытаемся достичь следующих целей, поставленных в рамках исследовательской работы:

1) демонстрация разных методов решения геометрических задач;
2) выявление преимуществ и недостатков в применении конкретных методов решения;
3) установление внутрипредметных связей в процессе демонстрации различных способов решения.

<u>Задача 1.</u> На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC построен квадрат ABDE в той полуплоскости от прямой AB, которой не принадлежит треугольник ABC. Найти расстояние от вершины C прямого угла до центра квадрата, если катеты BC и AC имеют соответственно длины a и b. (Приложение №1)

<u>Решение 1</u>(по теореме синусов)

Пусть точка Q – центр построенного квадрата. Так как угол AQB прямой, то точка Q лежит на описанной около треугольника ABC окружности. (Приложение №2) Её диаметром служит гипотенуза AB. Из треугольника AQC по теореме синусов имеем: $\mathrm{CQ} = \mathrm{AB} \cdot \sin(\alpha + 45^0)$, где α - величина угла BAC. Далее получаем:

$CQ = c \cdot (\sin\alpha \cdot \cos 45^0 + \cos\alpha \cdot \sin 45^0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot c \cdot (\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}) = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$. Итак, искомое расстояние CQ равно $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

<u>Решение 2</u>(по теореме косинусов)

Из того же треугольника AQC по теореме косинусов находим:

$\mathrm{CQ}^2 = b^2 + AQ^2 - 2b \cdot AQ \cdot \cos(\alpha + 45^0)$. Поскольку $\mathrm{AQ}^2 = \dfrac{1}{2}c^2$, то

$$\mathrm{CQ}^2 = b^2 + \frac{1}{2}c^2 - 2b \cdot \frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\frac{b}{c} - \frac{a}{c}) = b^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - b^2 + ab = \frac{1}{2}(a+b)^2,$$

$$CQ = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

<u>Решение 3</u>(по теореме Птолемея)

Для вписанного в окружность четырёхугольника AQBC имеем:

$\mathrm{a} \cdot \mathrm{AQ} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{BQ} = \mathrm{c} \cdot \mathrm{CQ}$.

Но $AQ = BQ = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$ и, следовательно, $(a+b) \cdot \dfrac{c}{\sqrt{2}} = c \cdot CQ$, откуда $CQ = \dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Решение 4(методом площадей)

Сумма площадей треугольников ABC и ABQ равна площади четырёхугольника AQBC:

$\frac{1}{2}\text{ab} + \frac{1}{2}AQ^2 = \frac{1}{2}c \cdot CQ \cdot \sin\varphi,$ где φ - величина угла между прямыми AB и CQ.

Луч CQ есть биссектриса угла ACB, так как вписанные углы ACQ и BCQ опираются на равные дуги AQ и BQ. По теореме о внешнем угле треугольника $\varphi = \alpha + 45^0$. Подставив в предыдущее равенство вместо $\text{AQ}^2 =$

$\frac{1}{2}(\text{a}^2 + b^2)$ и $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a+b}{c}$, получим:

$ab + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = CQ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (a+b).$ Откуда становится ясно, что $CQ = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$

Решение 5(методом дополнительных построений)

Проведём луч QC_1 так, что $\angle AQC_1 = \angle BQC.$ (Приложение №3) Тогда треугольники CBQ и C_1AQ равны по стороне и двум прилежащим углам.

$\angle \text{CBQ} = \angle ABC. + 45^0, \angle QAC_1 = 180^0 - (\angle BAC + 45^0) = \angle ABC + 45^0.$

Следовательно, $\angle CB\text{Q} = \angle QAA_1$. Отсюда следует, что $CQ = QC_1$ и $CB = AC_1$.

Поэтому $CC_1 = CA + AC_1 = CA + CB = a + b$. Треугольник CQC_1 - равнобедренный

($CQ = CQ_1$) и прямоугольный($\angle CQC_1 = \angle AQC + \angle AQC_1 = \angle AQC + \angle BQC = \angle BQA = 90^0$). Поэтому $CQ = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$

Решение 6(методом координат)

Примем прямые CA и CB за координатные оси Ox и Oy прмоугольной декартовой системы координат. Пусть x и y координаты точки Q.Точка Q - точка биссектрисы угла ACB и равноудалена от точек A(b;0) и B(a;0).

Учитывая, что x = y, решим уравнение $(\text{x - b})^2 + y^2 = x^2 + (y-a)^2$, откуда

$2x(b-a) = (b^2 - a^2).$ Если $a \neq b$, то $x = y = \frac{a=b}{2}.$

При a = b четырёхугольник AQBC является квадратом и $x = y = a$, то есть координаты точки Q удовлетворяют прежнему решению. По формуле расстояния между двумя точками $CQ = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2 \cdot (\frac{a+b}{2})^2} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

<u>Решение 7</u>(чисто геометрическое)

Опишем около квадрата $ABDA_1$ другой квадрат со стороной a + b. Тогда искомое расстояние, очевидно, равно половине диагонали этого квадрата.

<u>Задача 2</u>. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. На дуге BC дана произвольная точка M. Доказать, что MA = MB + MC.
(Приложение №5)

<u>Решение 1</u>(с помощью следствия из теоремы синусов)

Так отрезки MA, MB и MC являются хордами окружности, описанной около треугольника ABC, то их длины можно выразить через радиус R этой окружности. Обозначив $\angle BAM = \alpha$, находим:

$x = 2R\sin(60^0 + \alpha), y = 2R\sin\alpha, z = 2R\sin(60^0 - \alpha)$.

Тогда из тождества $\sin(60^0 + \alpha) = \sin\alpha + \sin(60^0 - \alpha)$ следует, что $x = y + z$, то есть MA = MB + MC.

<u>Решение 2</u>(с помощью теоремы косинусов)

Отрезки MA, MB и MC являются сторонами треугольников AMB и BMC, в которых
$\angle AMB = 60^0$ и $\angle BMC = 120^0$. Применим к этим треугольникам теорему косинусов. Пусть $AB = a, MA = x, MB = y, MC = z$. Учитывая, что $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ и $\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$, получим $a^2 = x^2 + y^2 - xy,\ a^2 = z^2 + y^2 + yz$. Вычтем почленно из

первого равенства второе и получим: $x^2 - z^2 - y \cdot (x+z) = 0$ и далее $(x+z) \cdot (x-y-z) = 0.$ Отсюда x = y + z, то есть MA = MB + MC.

Решение 3(методом площадей)

Пусть $\angle \mathrm{ANB} = \varphi,$ где $N = AM \cap BC.$ Тогда $S_{ABMC} = S_{ABM} + S_{ACM}.$ Нетрудно доказать, что

$\angle \mathrm{ABM} = \varphi (\angle \mathrm{ABM} = \frac{1}{2} \cup \mathrm{AC} + \frac{1}{2} \cup CM, \angle ANB = \frac{1}{2}(\cup \mathrm{AB} + \cup \mathrm{CM}), \text{но} \cup \mathrm{AB} = \cup \mathrm{AC})$

$\angle \mathrm{ACM} = 180^0 - \varphi$ $(\angle \mathrm{ACM} = \frac{1}{2}(\cup AB + \cup BM))$, поэтому

$\frac{1}{2} ax \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} xy \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} az \cdot \sin(180^0 - \varphi),$ откуда $x = y + z.$ То есть MA = MB + MC.

Решение 4

(методом дополнительных построений и с помощью поворота)

Отложим на отрезке MA отрезок MD, равный отрезку MB, и докажем, что DA = MC. (Приложение №5)

Поскольку $\angle \mathrm{AMB} = 60^0,$ то треугольник BDM является равносторонним. Треугольник ABC также равносторонний. Повернём треугольник BCM вокруг точки B на 60^0 так, чтобы точка M совпала с точкой A. Тогда точка M совпадёт с точкой D и отрезок MC совместится с отрезком DA. Итак, DA = MC. Поэтому при любом выборе положения точки M на дуге BC имеем: MA = MB + MC. (Изящное решение!)

Решение 5

(методом дополнительных построений)

Отложим на отрезке MA отрезок MD, равный отрезку MB, и докажем, что DA = MC.

Треугольник BDM равносторонний. Соединим точки B и D. BM = BD, углы DAB и BCM равны, AB = BC, $\angle ADB = \angle CMB = 120^0$. Значит, равны и третьи углы треугольников
ADB и BMC. Поэтому треугольники ADB и BMC равны. Следовательно, AD = MC.
Значит, MA = AD + DM = MC + CB. Требуемое доказано.

Решение 6(с помощью теоремы Птолемея)

По теореме Птолемея имеем: $BC \cdot AM = AC \cdot BM + AB \cdot CM$. Так как BC = AC = AB = a, то, разделив обе части этого равенства на a, получим, что AM = BM + CM.
Теперь рассмотрим различные способы решения одной интересной алгебраической задачи:

Задача 3: $a^2 + b^2 = 1. \Rightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}$ **».**

Решение.

Первый способ.

Из условия вытекает, что $b^2 = 1 - a^2$.

И нужно доказать, что $a^4 + (1 - a^2)^2 \geq \frac{1}{2}$. Следующая цепочка верных неравенств приведет нас к желаемому результату: $(2a^2 - 1)^2 \geq 0. \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4a^4 - 4a^2 + 1 \geq 0. \Rightarrow 2a^4 - 2a^2 + \frac{1}{2} \geq 0. \Rightarrow a^4 + (1 - 2a^2 + a^4) \geq \frac{1}{2}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4 + (1 - a^2)^2 \geq \frac{1}{2}. \Rightarrow a^4 + (b^2)^2 \geq \frac{1}{2}. \Rightarrow a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}.$$ Требуемое доказано.

Второй способ.

Опираясь на соотношение между средним квадратичным и средним арифметическим двух положительных чисел, имеем:

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}} \geq \frac{a^2+b^2}{2}. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \dfrac{a^4+b^4}{2} \geq \dfrac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4}. \Rightarrow a^4+b^4 \geq \dfrac{2}{4}\cdot 1^2. \Rightarrow a^4+b^4 \geq \dfrac{1}{2}.$ Ясно, что неравенство будет верным, если одно из чисел будет равным нулю.

Третий способ решения указывает на связь алгебры и тригонометрии.

Согласно условию можно допустить: $a^2=\sin^2\alpha,\ b^2=\cos^2\alpha.$ Решение задачи свелось к доказательству истинности неравенства

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Очевидно, что

$$\sin^2 2\alpha \leq 1. \Rightarrow 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha \leq 1. \Rightarrow -2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \geq -\frac{1}{2}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \geq \frac{1}{2}. \Rightarrow \left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \geq \frac{1}{2}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha \geq \frac{1}{2}. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha \geq \dfrac{1}{2}.$ И требуемое очевидно истинно.

Решение четвертым способом основано на применении известного свойства скалярного произведения ненулевых векторов. (То есть $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha,$ где α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}.$

Причем, ввиду того, что $\left|\cos\alpha\right| \leq 1,\ -\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right| \leq \vec{a}\cdot\vec{b} \leq \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|.$

И равенство слева выполняется в случае, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противонаправлены, а справа - если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены.)

Рассмотрим векторы $\vec{m}\{a^2;b^2\}$ и $\vec{n}\{1;1\}$. Тогда $|\vec{m}| = \sqrt{a^4+b^4}$, $|\vec{n}| = \sqrt{2}$ и

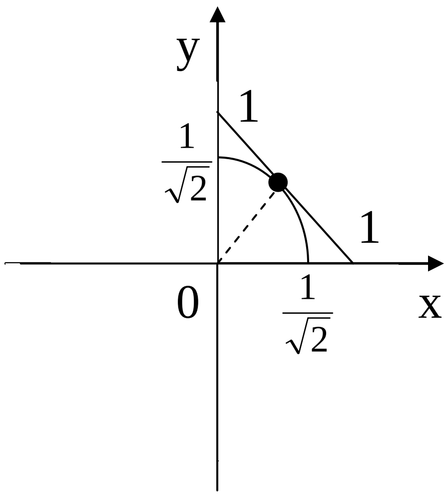
$a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 1 \le \sqrt{a^4+b^4} \cdot \sqrt{2}$, а $\dfrac{a^2+b^2}{\sqrt{2}} \le \sqrt{a^4+b^4}$.

И далее $a^4+b^4 \ge \dfrac{(a^2+b^2)^2}{2}$, то есть $a^4+b^4 \ge \dfrac{1}{2}$.

<u>Решим задачу пятым способом</u>.

Рассмотрим графическую интерпретацию задачи.

Для этого введем замену: $a^2 = x$, $b^2 = y$. Тогда уравнение и неравенство будут выглядеть так: $x + y = 1$ и $x^2 + y^2 \ge \dfrac{1}{2}$. Учитывая, что $x \ge 0, y \ge 0$, построим их графики – отрезок с концами на координатных осях Ox и Oy в точках $(1;0)$, $(0;1)$ и открытую область, ограниченную четвертью окружности



$x^2 + y^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ и положительными координатными полуосями.

Ясно, что эти графики касаются в точке $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Все точки первого графика расположены в области, являющейся графиком неравенства $x^2 + y^2 \ge \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, требуемое доказано.

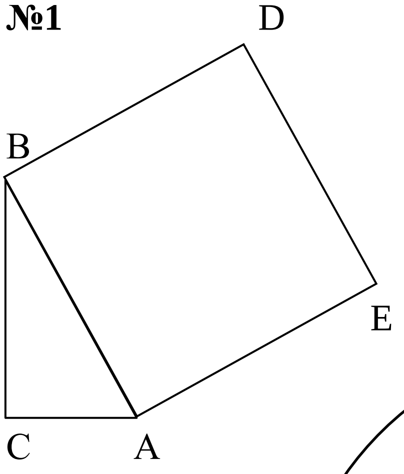
Вывод

В работе мы рассмотрели различные способы решений трёх различных задач, используя известные методы. Анализируя все решения, мы сделали для себя важные выводы. Мы поняли, что важно не только решить задачу, а решить ее наиболее рациональным способом.

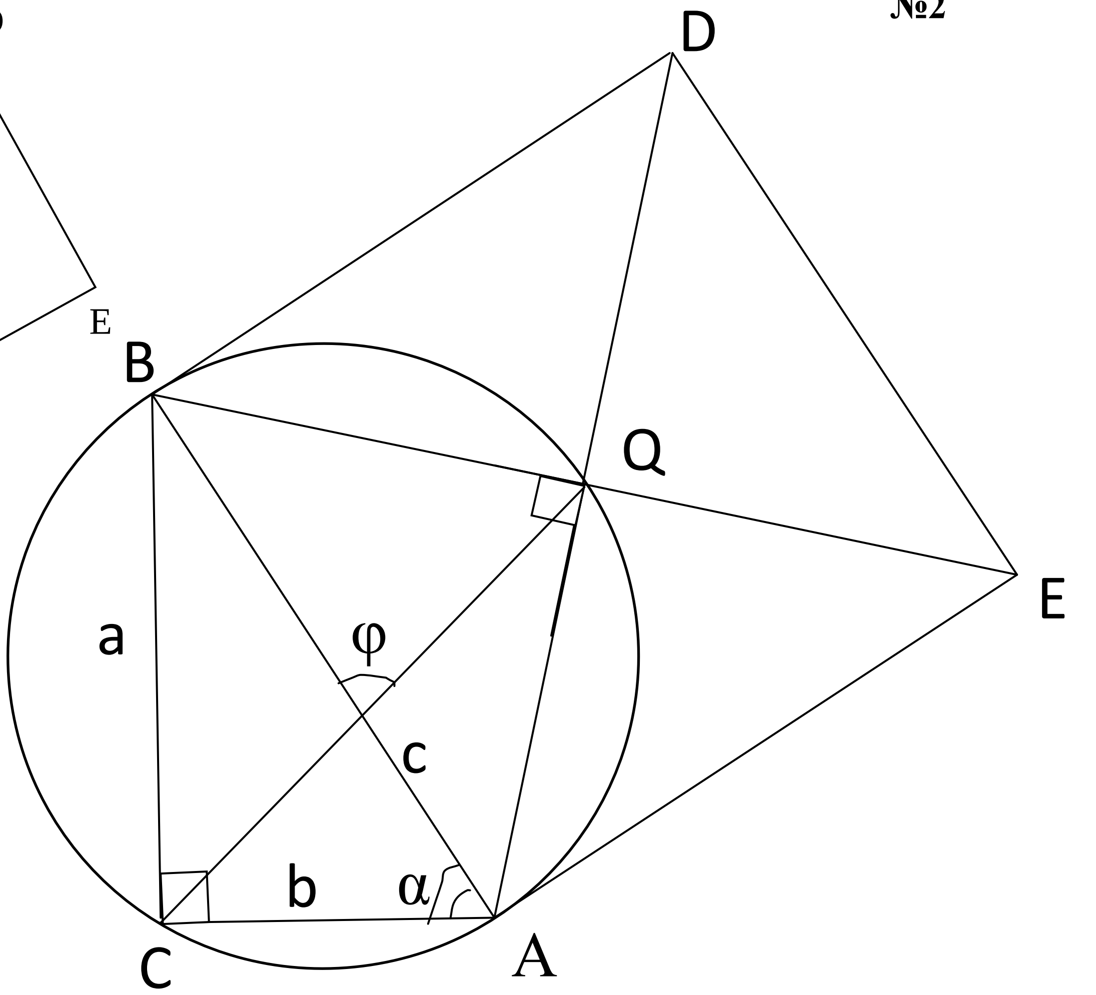
Как видим, рассматриваемые задачи предполагают разнообразные способы решения, применение которых позволяет демонстрировать значение использования внутрипредметных связей при установлении зависимостей между математическими объектами.

Приложения

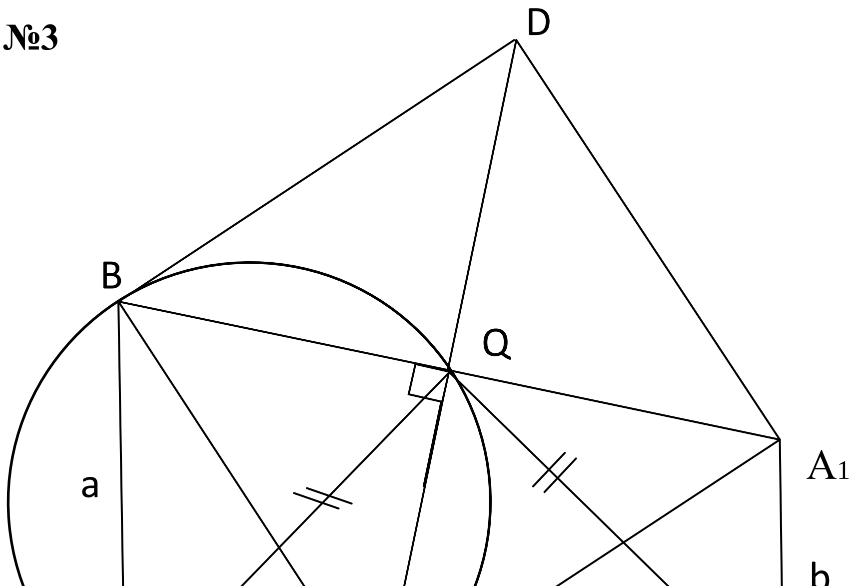
№1



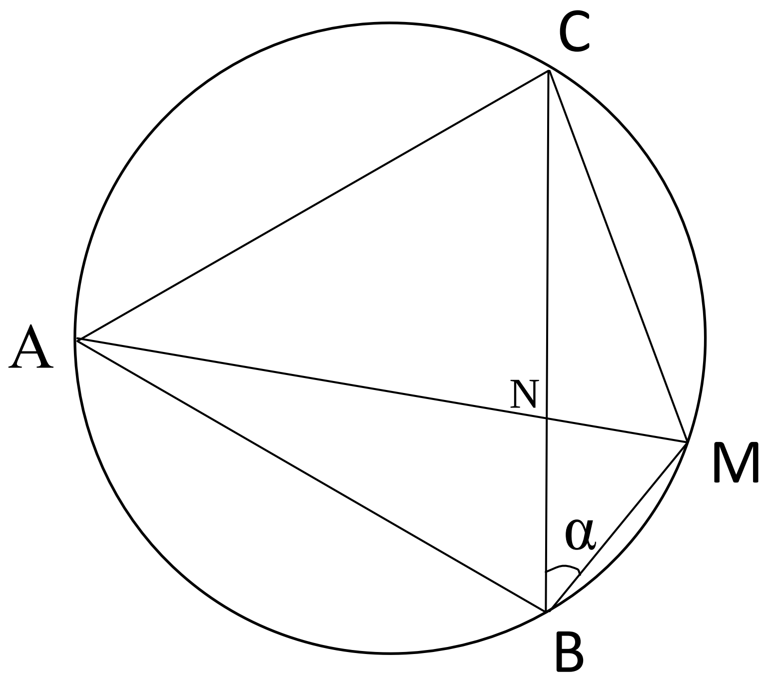
№2



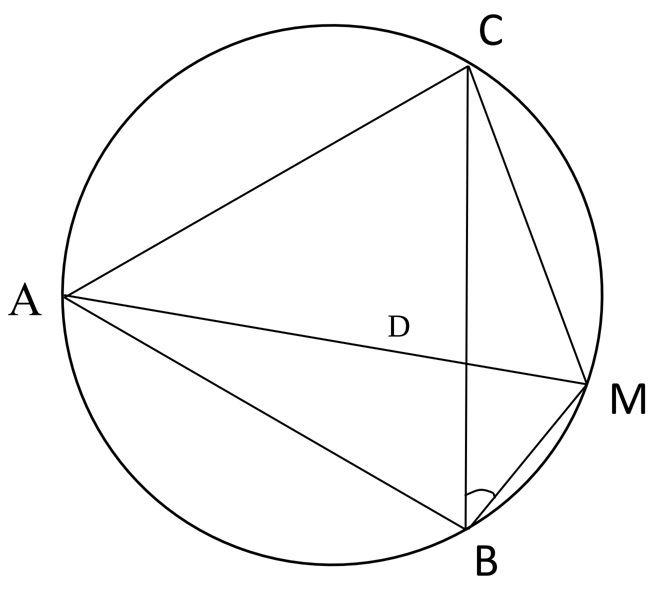
№3

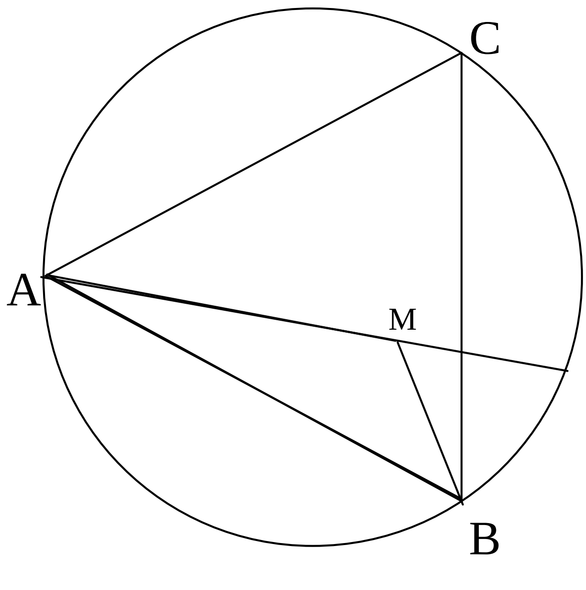


№4



№5





Список использованной литературы

.

И.С. Маркова «Новые олимпиады по математике» 2005
Н.Д. Золотарёва «Геометрия. Базовый курс с решениями и указаниями» 2015
Л.И. Звавич, А.Р. Рязановский «Геометрия в таблицах» 2016
Н.М. Иванов «Пособие по математике для школьников и поступающих в вузы» 2012
Я.П.Понарин. «Задача одна – решений много». 1992.
Д.Ф.Изаак. «Поиски решения геометрической задачи». «Математика в школе»№6,1998.
В.А.Филимонов, Т.Н.Фисенко. «Об одном подходе к изучению геометрии в средней школе». «Математика в школе» №1,1997
Д.Пойя. «Как решать задачу». М.,1959.
Д.Пойя. «Математическое открытие». М., 1970.
Э.Г.Готман, З.А.Скопец. «Задача одна - решения разные».