

РЕКОМЕНДОВАНО

школьным методическим объединением
учителей математики и информатики

ГАОУ СО «Гимназия № 1»

протокол № 4 от «01» апреля 2025г.

Руководитель МО



И.В. Гришина

Решение заданий ЕГЭ

по математике профильного уровня

по теме

«Первообразная и площадь криволинейной трапеции»

(задание №8 в модели КИМ 2025 года)

Автор: Гришина Ирина Владимировна,

учитель математики

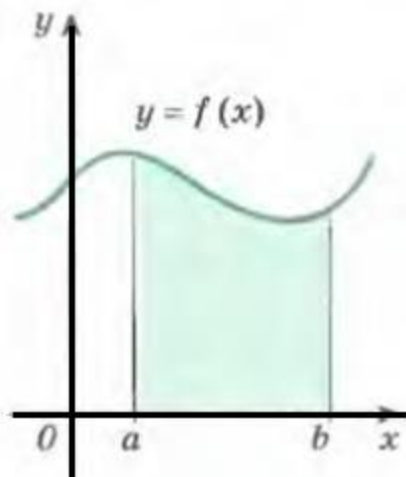
ГАОУ СО «Гимназия № 1»

Данная статья будет полезна ученикам старших классов, готовящимся к сдаче ЕГЭ по математике на профильном уровне, а также начинающим учителям математики. Одно из заданий с кратким ответом (по модели КИМ 2025 года это задание №8) бывает на тему «Производная и первообразная». В этой статье мы рассмотрим подробно все имеющиеся в **Открытом Банке Заданий** ФИПИ прототипы задач по теме «Первообразная». На данный момент таких прототипов в **ОБЗ** четыре.

Сначала повторим необходимые для решения задач теоретические сведения.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для каждого значения x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Определение. Криволинейной трапецией называется фигура на координатной плоскости, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (смотри рисунок).

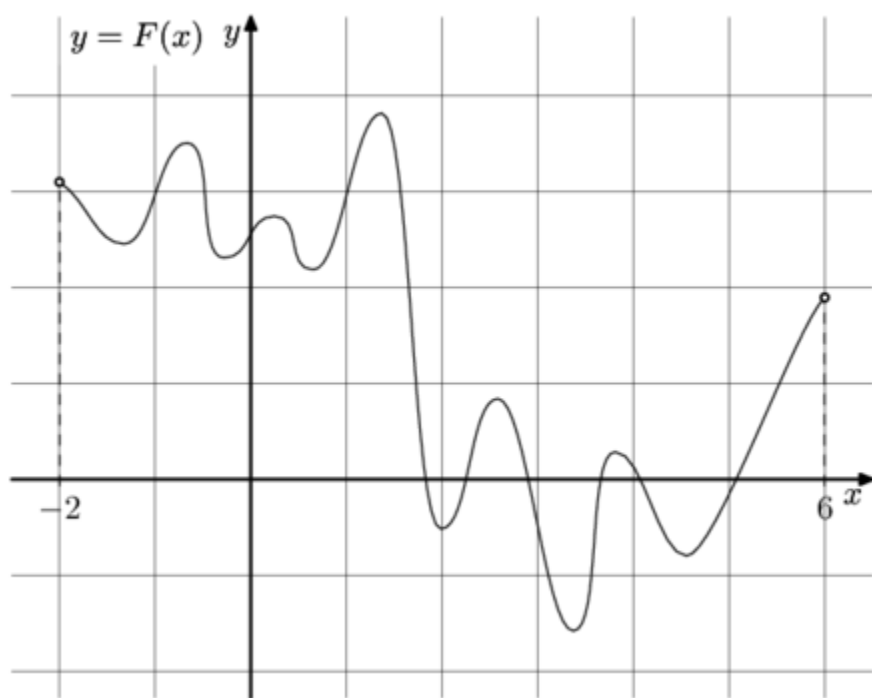


Теорема (о площади криволинейной трапеции). Если $f(x)$ - непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а $F(x)$ - одна из её первообразных на данном отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$, то есть

$$S = F(b) - F(a).$$

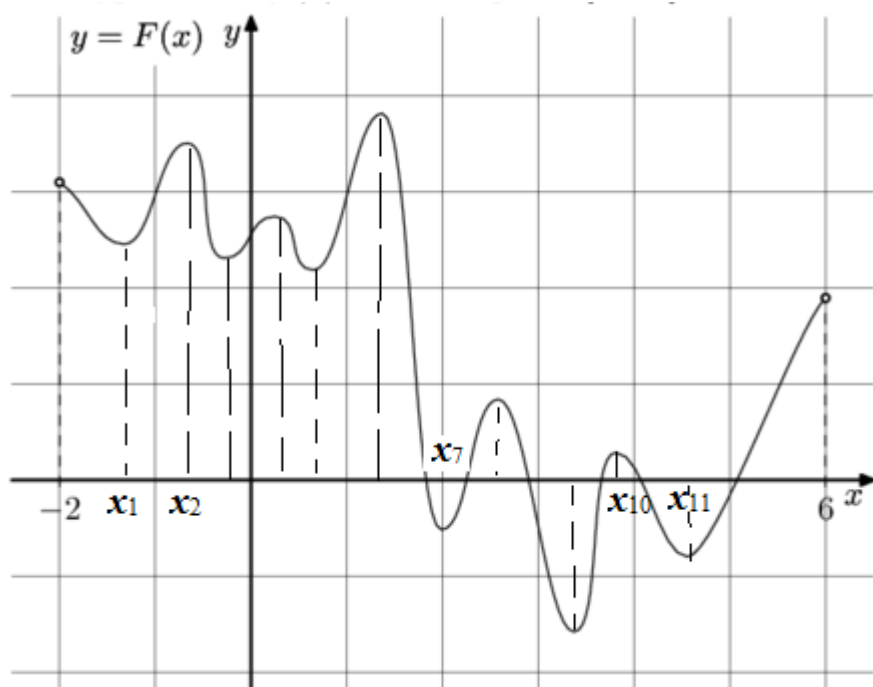
Теперь приступим к рассмотрению задач.

Задача 1. На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 5]$

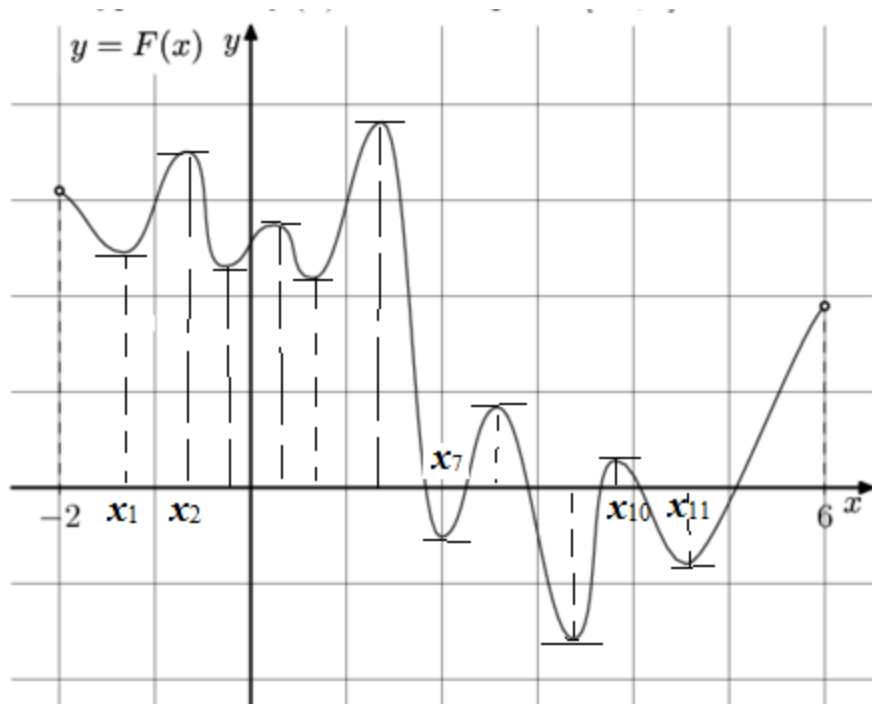


Решение.

Посмотрим на **характерные** точки данного графика, имеющие абсциссы $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$.



Очевидно, что в этих точках к графику можно провести касательные, параллельные оси Ox :



Параллельность прямых с осью Ox означает, что угловой коэффициент каждой из этих прямых равен нулю. Согласно геометрическому смыслу производной угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции в точке с абсциссой x_0 , бывает равным значению производной данной функции при значении аргумента x_0 .

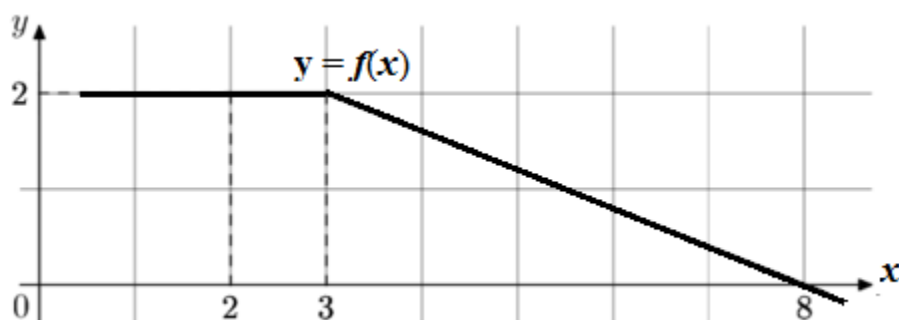
Таким образом, мы получаем, что $F'(x_1) = 0$, $F'(x_2) = 0$, $F'(x_3) = 0$, ..., $F'(x_{11}) = 0$.

Но так как $F'(x) = f(x)$, то и $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0$, ..., $f(x_{11}) = 0$.

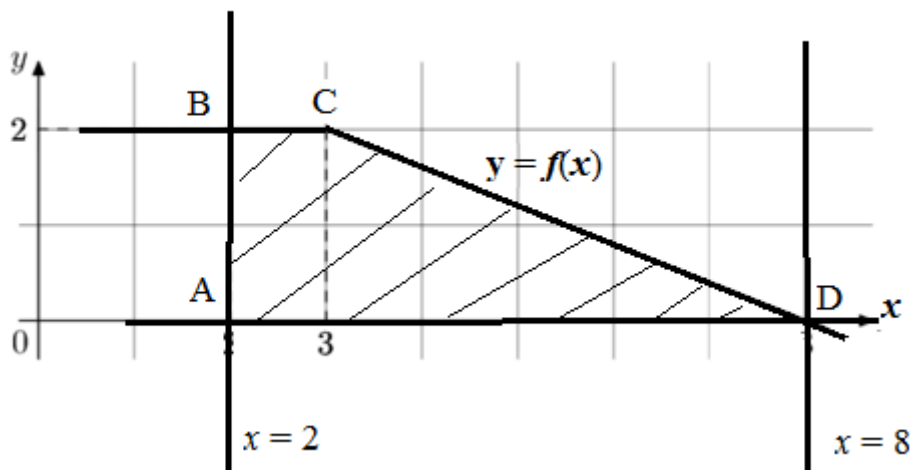
Из полученных одиннадцати корней уравнения $f(x) = 0$ один (конкретно x_1) не принадлежит указанному в условии отрезку $[-1; 5]$. Значит, уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 10 решений на указанном промежутке.

Ответ. 10

Задача 2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ - одна из первообразных функции $y = f(x)$.



Решение. Заметим, что функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[2; 8]$. Искомое значение выражения $F(8) - F(2)$ представляет собой приращение функции $y = F(x)$, полученное ею на отрезке $[2; 8]$. Согласно теореме оно равно площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[2; 8]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = 2$, $x = 8$ (смотри рисунок):



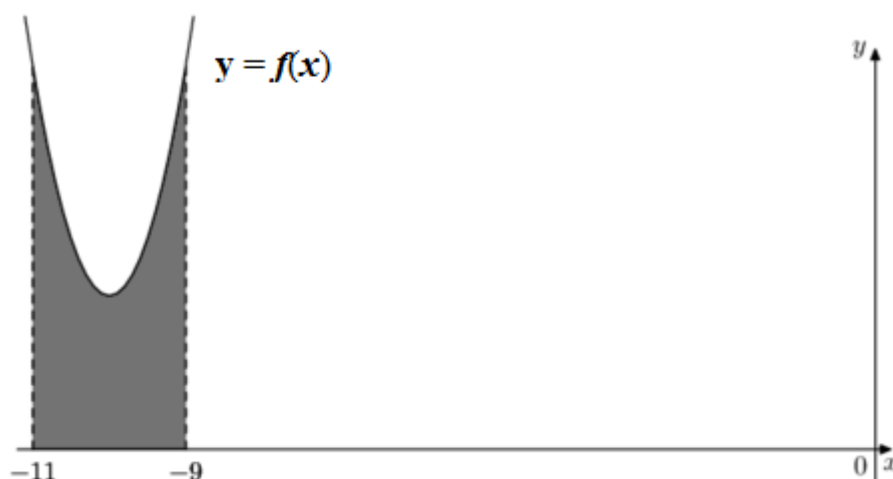
Таким образом, $F(8) - F(2)$ – это площадь заштрихованной фигуры ABCD, которая оказалась просто прямоугольной трапецией с основаниями BC и AD и высотой AB.

Тогда следует найти её площадь: $S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2} \cdot AB = \frac{1+6}{2} \cdot 2 = 7$.

Значит, $F(8) - F(2) = S_{ABCD} = 7$.

Ответ. 7

Задача 3. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.



Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ – одна из первообразных функции $y = f(x)$.

Найдите площадь закрашенной фигуры.

Решение. Закрашенная фигура – это криволинейная трапеция, ограниченная графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[-11; -9]$ функции

$f(x) = 3x^2 + 60x + 302$, осью Ox и двумя вертикальными прямыми с уравнениями

$x = -11$, $x = -9$. Формула функции $f(x) = 3x^2 + 60x + 302$ получена путём дифференцирования функции $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$, хотя для решения задачи получать эту формулу вовсе необязательно.

Согласно теореме о площади криволинейной трапеции площадь закрашенной фигуры равна приращению одной из первообразных для $f(x)$, полученному ею на отрезке $[-11; -9]$. Заметим, что функция $\Phi(x) = x^3 + 30x^2 + 302x$ (обнулили свободный член многочлена) тоже является первообразной для функции $f(x) = 3x^2 + 60x + 302$. Для простоты дальнейших вычислений представим $\Phi(x)$ так:

$\Phi(x) = x(x^2 + 30x + 302)$ – вынесли общий множитель за скобки.

Найдём значения этой функции в точках -11 и -9 .

$$\Phi(-11) = -11 \cdot ((-11)^2 + 30(-11) + 302) = -11 \cdot (121 - 330 + 302) = -11 \cdot 93 = -1023.$$

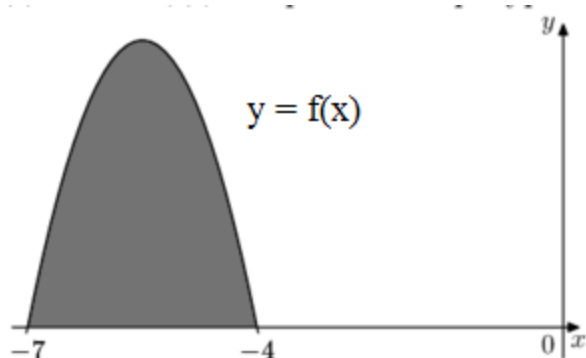
$$\Phi(-9) = -9 \cdot ((-9)^2 + 30(-9) + 302) = -9 \cdot (81 - 270 + 302) = -9 \cdot 113 = -1017.$$

Теперь вычисляем площадь указанной фигуры:

$$S = \Phi(-9) - \Phi(-11) = -1017 - (-1023) = 6.$$

Ответ. 6

Задача 4. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.



Функция $F(x) = -\frac{5}{9}x^3 - \frac{55}{6}x^2 - \frac{140}{3}x - 1$ – одна из первообразных функции

$y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Решение. Несмотря на то, что отсутствуют вертикальные участки границы фигуры, закрашенная фигура тоже является криволинейной трапецией, просто её основания

«выродились» в точки с координатами $(-7; 0)$ и $(-4; 0)$. Для простоты вычислений рассмотрим следующую первообразную для функции $y = f(x)$:

$$\Phi(x) = -x \cdot \left(\frac{5}{9}x^2 + \frac{55}{6}x + \frac{140}{3} \right) = -\frac{5}{3}x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{2}x + 28 \right)$$

$$\Phi(-7) = \frac{35}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (-7)^2 + \frac{11}{2} \cdot (-7) + 28 \right) = \frac{35}{3} \cdot \left(\frac{49}{3} - \frac{77}{2} + 28 \right) = \frac{35}{3} \cdot \left(16\frac{1}{3} + 28 - 38\frac{1}{2} \right) =$$

$$\frac{35}{3} \cdot \left(44\frac{1}{3} - 38\frac{1}{2} \right) = \frac{35}{3} \cdot \left(43\frac{8}{6} - 38\frac{3}{6} \right) = \frac{35}{3} \cdot 5\frac{5}{6} = \frac{35}{3} \cdot \frac{35}{6} = \frac{1225}{18}.$$

$$\Phi(-4) = \frac{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot (-4)^2 + \frac{11}{2} \cdot (-4) + 28 \right) = \frac{20}{3} \cdot \left(\frac{16}{3} - 22 + 28 \right) = \frac{20}{3} \cdot \left(\frac{16}{3} + 6 \right) = \frac{20}{3} \cdot \frac{34}{3} = \frac{680}{9}$$

$$S = \frac{680}{9} - \frac{1225}{18} = \frac{1360 - 1225}{18} = \frac{135}{18} = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Ответ. 7,5

При решении заданий типа задачи 3 или задачи 4 важно следить за реальностью полученного результата. Следует помнить, что площадь фигуры может быть выражена только **положительным числом**, а также вряд ли в этих задачах ЕГЭ она может быть равной сотням квадратных единиц. Такие ошибки очень часто делают выпускники в своих решениях.

Используемые источники

1. Алгебра и начала анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Дудницын и др. – 15 издание, Москва, Просвещение, 2006.

2. Материалы сайта www.prof.mathege.ru