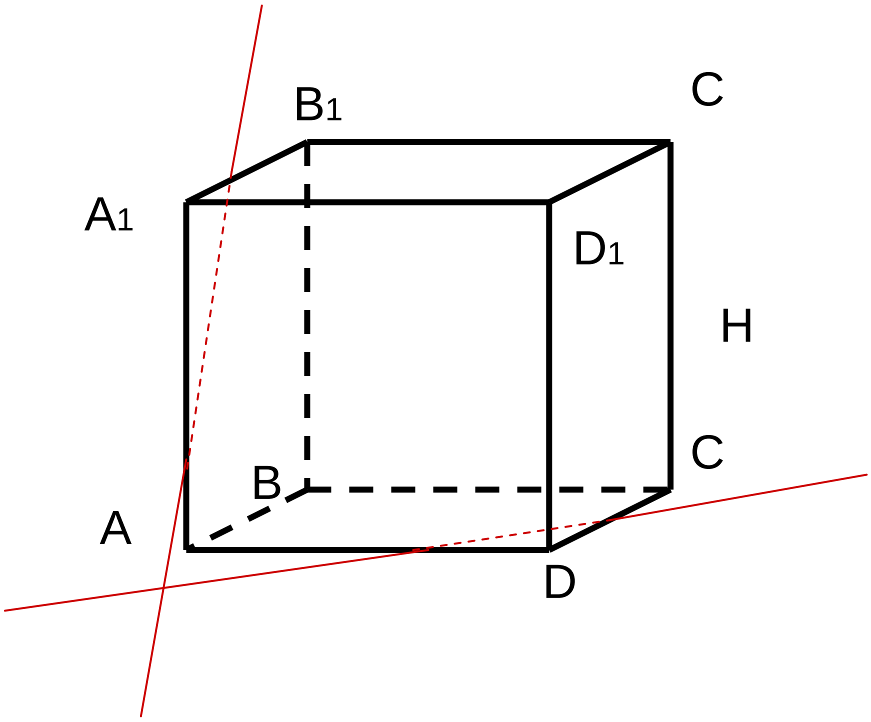
РЕКОМЕНДОВАНО
школьным методическим объединением
учителей математики и информатики
ГАОУ СО «Гимназия № 1»
протокол № 4 от «01» апреля 2025г.
Руководитель МО
________________ И.В. Гришина

Использование метода вспомогательного многогранника при решении стереометрических задач

Автор:
учитель математики
ГАОУ СО «Гимназия № 1»
Распарин Владимир Николаевич

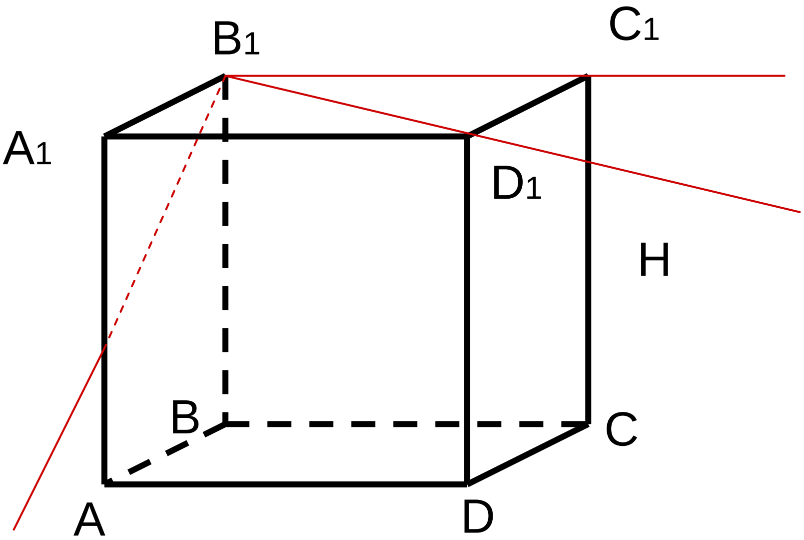
При решении задач по стереометрии уже на самом первом шаге часто возникают трудности. Нужно обладать хорошо развитым геометрическим воображением, чтобы представить себе соответствующую пространственную картину. Если речь идёт о геометрических телах, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни (куб, тетраэдр, параллелепипед и т. п.), то эти многогранники легко себе представить. Как их изображать, известно. Значительно труднее изобразить, например, скрещивающиеся прямые или совокупность прямых и плоскостей в пространстве. И не просто изобразить, а сделать чертёж, помогающий решению задачи.

Существует метод, позволяющий в ряде случаев преодолеть указанные трудности. Он основан на следующем соображении. Если пространственная конфигурация трудно воспринимается и не связана с конкретным геометрическим телом, то её надо попробовать искусственно связать с каким-нибудь телом. Например, с параллелепипедом или с кубом.
Как видим, изображённый на бумаге куб, облегчает работу нашему воображению. По **следующему рисунку, например**, отчётливо видно, что прямые l и m являются скрещивающимися.



Уберём куб и пространственная наглядность исчезнет – мы увидим пересекающиеся прямые l и m на плоскости.

Другой пример. Три луча l, m и n, исходящие из одной точки, нарисованы на кубе.



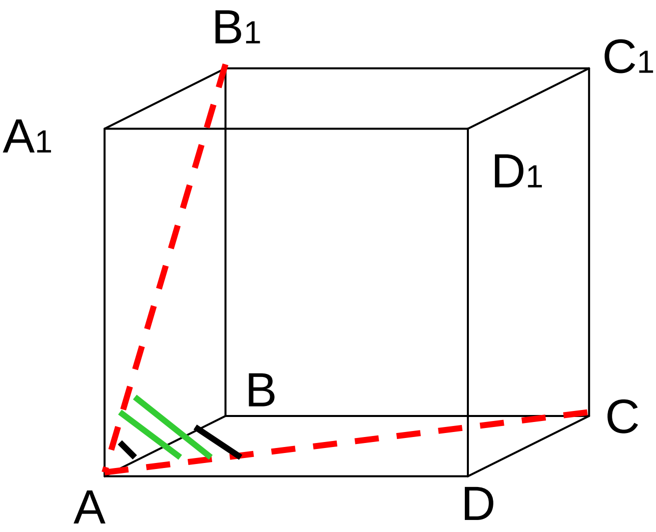
Ясно, что они представляют собой рёбра трёхгранного угла. Если же убрать куб, то для того, чтобы увидеть трёхгранный угол, мы должны заставить своё воображение потрудиться.

Использование вспомогательного куба не только «превращает» плоскую картину в объёмную, но и указывает путь решения ряда задач. Следующие задачи это красноречиво подтверждают.

Задача 1. Плоские углы трёхгранного угла равны 45^0, 45^0 и 60^0. Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из граней, плоский угол которой равен 45^0.
Найти угол между этой прямой и ребром трёхгранного угла, не лежащим в упомянутой грани.

Решение.

Рассмотрим вспомогательный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведём диагонали AB_1 и AC двух его смежных граней. Имеем $\angle B_1AB = 45^0$, $\angle BAC = 45^0$, $\angle B_1AC = 60^0$ как угол правильного треугольника AB_1C.

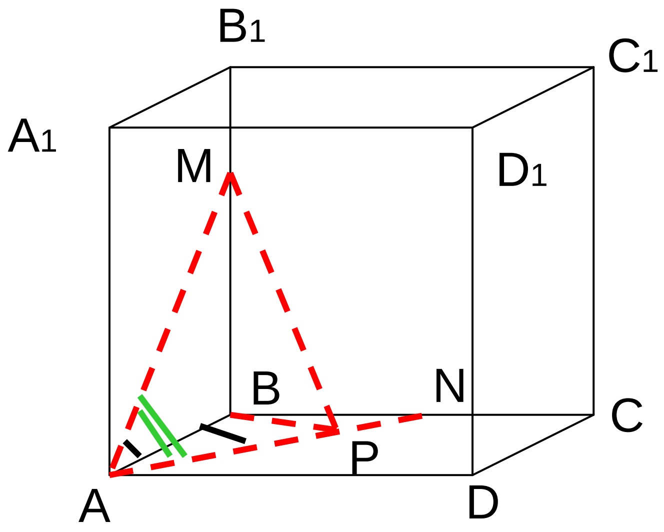


Следовательно, трёхгранный угол AB_1BC – это угол, о котором говорится в задаче. Ребро AA_1 проходит через вершину A и перпендикулярно грани BAC. Значит, требуется найти угол A_1AB_1. Ответ очевиден: $\angle A_1AB_1 = 45^0$.

Задача 2. Угол между двумя гранями трёхгранного угла прямой, а величина каждого плоского угла этих граней равна α. Найти величину плоского угла третьей грани.

Решение.

Сначала будем считать угол α острым. Пусть вершина A вспомогательного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является вершиной трёхгранного угла, а отрезки AM, AB и AN – его рёбрами (если $\alpha \rangle 45^0$, то точки M и N лежат на продолжениях рёбер BB_1 и BC).
Требуется найти угол MAN.



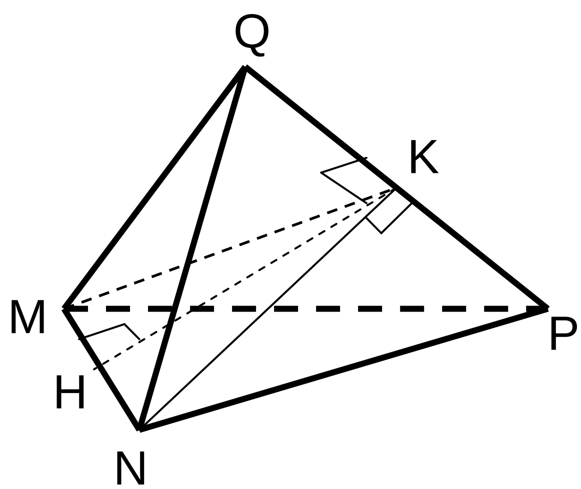
Опустим из точки M перпендикуляр MP на отрезок AN и соединим точки B и P. По теореме о трёх перпендикулярах отрезок BP перпендикулярен отрезку AN. Из прямоугольных треугольников APB и ABM получаем $AP = AB\cos\alpha$, $AM = AB/\cos\alpha$.

Искомый угол MAN – острый угол прямоугольного треугольника APM, поэтому $\cos\angle MAN = AP/AM = \cos^2\alpha$. Тогда угол MAN равен $\arccos(\cos^2\alpha)$. Если $\alpha = 90^0$, то искомый угол прямой, что также может быть записано полученным соотношением.

Ответ: $\arccos(\cos^2\alpha)$.

Мы видим, что на кубе удобно изображать трёхгранные углы, две грани которых перпендикулярны. Это связано с тем, что куб содержит прямые двугранные углы. Но в кубе заложен и линейный размер – длина его ребра. Это даёт возможность изображать на чертеже и величины расстояний.

Задача 3. Ребро правильного тетраэдра QMNP равно $\sqrt{2}$. Найти расстояние и угол между ребрами MN и PQ.



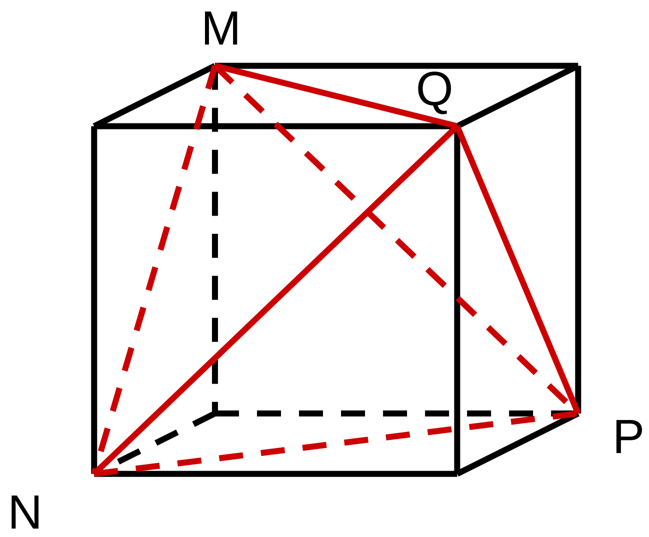
Решение.

Соединим вершины M и N данного тетраэдра с серединой K ребра PQ.

Так как треугольники NPQ и MPQ равносторонние и равные, то отрезки NK и MK – высоты соответствующих треугольников. Значит, прямая PQ перпендикулярна плоскости MKN, а значит, и высоте треугольника MKN, проведённой к стороне MN. Следовательно, высота KH треугольника MKN является общим перпендикуляром скрещивающихся рёбер тетраэдра QMNP. Следовательно, угол между прямыми MN и PQ равен 90^0.
Длина общего перпендикуляра этих рёбер есть расстояние между ними. Итак,

$$\rho(MN, PQ) = \sqrt{NK^2 - (\frac{1}{2}MN)^2} = \sqrt{PN^2 - PK^2 - \frac{1}{4}MN^2} = \sqrt{MN^2 - \frac{1}{4}MN^2 - \frac{1}{4}MN^2} = \sqrt{\frac{MN^2}{2}} = 1.$$

Ответ: 1.

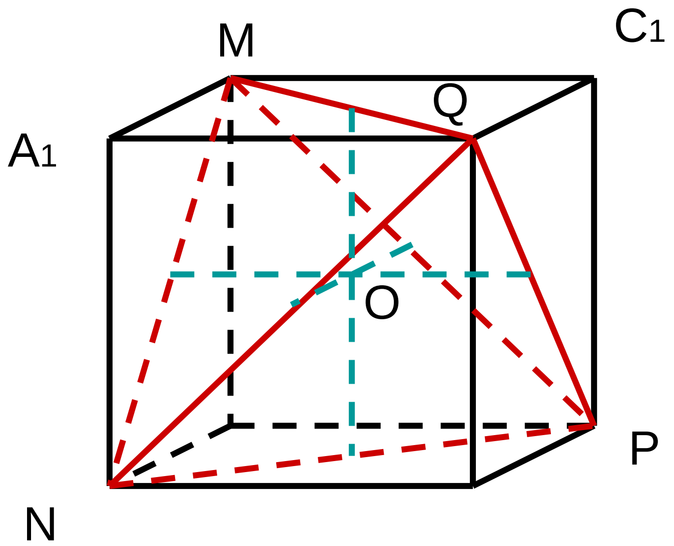


Решение превращается в устное, если данный тетраэдр поместить во вспомогательный куб с ребром 1. Сразу «видны» решения как первой из задач, так и второй. Расстояние между рёбрами тетраэдра равно длине ребра вспомогательного куба, то есть 1, а угол между MN и PQ равен 90^0.

Задача 4. Некоторый шар касается всех рёбер правильного тетраэдра. Найти радиус шара, если ребро тетраэдра равно $\sqrt{2}$.

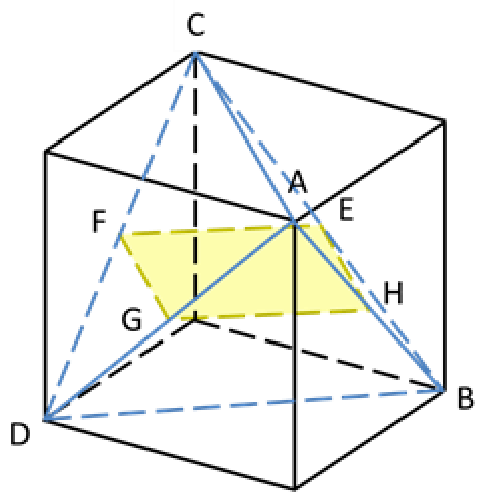
Решение.

Воспользовавшись предыдущим рисунком, эту задачу можно решить также буквально устно.
Шар фактически касается параллельных (противоположных) граней куба, в который следует вписать данный тетраэдр. Каждый из общих перпендикуляров скрещивающихся рёбер куба, совпадающих с рёбрами тетраэдра, есть диаметр шара. Диаметры шара пересекаются в центре вспомогательного куба.



А центр шара (куба) также является центроидом данного тетраэдра. Ведь концы диметров являются серединами противоположных рёбер тетраэдра (соответствующих диагоналей граней куба). А так как ребро куба равно $\sqrt{2}$, то ребро куба (диаметр шара) равно 1. Следовательно, радиус шара равен $\frac{1}{2}$.

Задача 5. Правильный тетраэдр пересекли плоскостью так, что получился квадрат. Найти его площадь, если ребро тетраэдра равно $\sqrt{2}$.



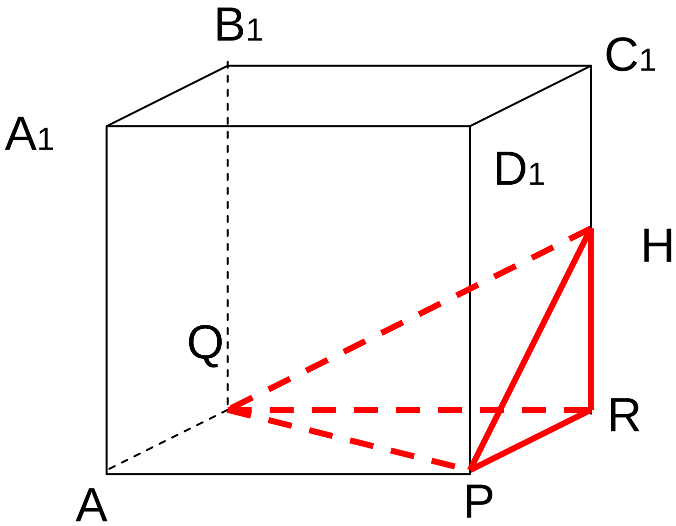
Решение.

Соединим отрезками центры боковых граней вспомогательного куба так, как показано на рисунке. Очевидно, что в сечении получился квадрат, вершины которого находятся в центрах граней куба. FE и GH параллельны и равны диагонали основания BD. То есть FE и GH параллельны и равны друг другу. FG и EH также параллельны и равны соответствующей диагонали того же основания куба. То есть FG и EH также параллельны и равны друг другу. А так как диагонали грани куба равны и взаимно перпендикулярны, то сечение FGHE - квадрат.

Задача 6. Основанием пирамиды HPQR является равнобедренный прямоугольный треугольник PQR, гипотенуза которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды HR перпендикулярно плоскости основания и равно 1. Найти угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра PR, а другая проходит через точку R и середину ребра PQ.

Решение.

Пусть длина ребра вспомогательного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2. Тогда диагональ каждой его грани равна $2\sqrt{2}$. Поместим пирамиду HPQR внутрь куба так, чтобы точки P, Q и R совпали точками D, B и C. Точка H совпадает с серединой ребра RC_1.

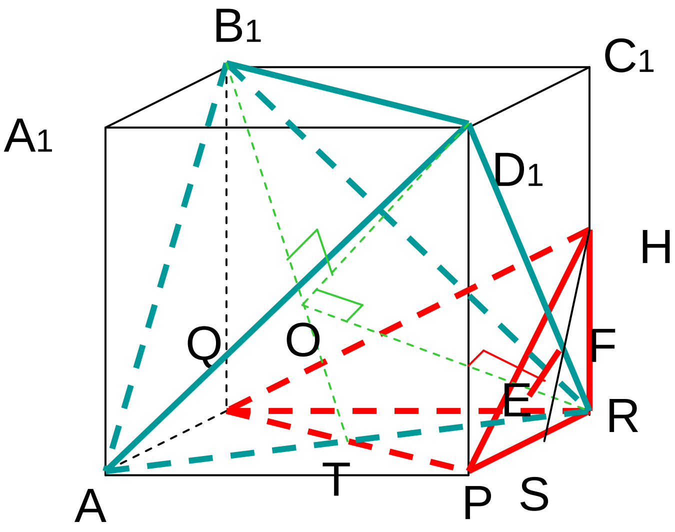


Соединим точку H с серединой ребра PQ – точкой S. Проведём диагональ RA нижней грани куба. Точка T пересечения диагоналей RA и PQ – середина отрезка PQ. Требуется найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми HS и RT.

Проведём диагонали DA, DR, B_1D, B_1A и B_1R , боковых граней куба. Очевидно, что отрезок HS параллелен отрезку B_1A. Поэтому искомый угол – это угол B_1AR, который равен 60^0(треугольник B_1AR равносторонний).

Заметим теперь, плоскость треугольника B_1AR содержит отрезок RT и параллельна отрезку HS. Поэтому искомое расстояние равно расстоянию между прямой HSи плоскостью B_1AR.

Рассмотрим правильный тетраэдр с основанием B_1AR и вершиной D_1. Пусть D_1O – высота тетраэдра. Из точки F пересечения отрезков D1R и HS опустим перпендикуляр FE на отрезок RO. Отрезок FE перпендикулярен плоскости B_1AR, так как отрезок FE параллелен отрезку D_1O. Значит, искомое расстояние равно FE.



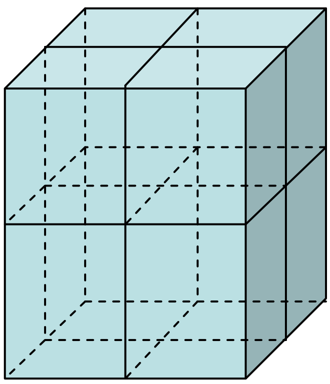
Из подобия треугольников D_1OR и FER следует: $\frac{FE}{D_1O}=\frac{FR}{D_1R}=\frac{1}{4}$. Найдём высоту D_1O тетраэдра D_1B_1AR. В прямоугольном треугольнике D_1OR гипотенуза $D_1R=2\sqrt{2}$, а катет RO составляет $\frac{2}{3}$ высоты правильного треугольника B_1AR со стороной $2\sqrt{2}$, то есть $RO=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Тогда $D_1O=\sqrt{D_1R^2-RO^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. И, наконец, $FE=\frac{1}{4}D_1O=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

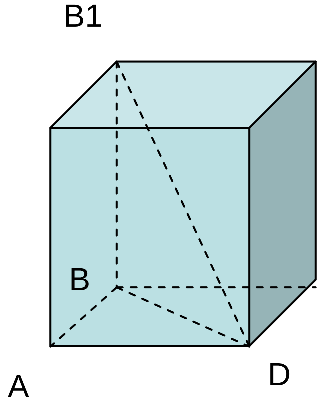
Задача 7. В сфере, радиус которой равен 1м, летают 9 мух. Найдутся ли две из них, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{3}$ м?

На первый взгляд, может показаться, что эта задача никакого отношения к рассматриваемой теме не имеет. Но это только на первый взгляд…

Решение.



Впишем данную сферу в куб, ребро которого равно 2м. Разобьем этот куб на восемь равных кубиков с ребром 1м.



По принципу Дирихле(8 кубиков – клетки, а 9 мух - кролики!) найдутся две мухи, которые будут летать в одной клетке. Очевидно, что наибольшее возможное расстояние между ними равно длине диагонали куба, то есть $\sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Поистине волшебный куб!

Библиография

1. Геометрия 10 - 11 : учеб. для общеобразоват. учреждений ⁄ Л. С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 2006.
2. Задачник по геометрии. Б. Делоне и О. Житомирский (издание пятое) ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО_ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ Москва1950Ленинград
3. Избранные задачи и теоремы элементарной математики Д.О.Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО_ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ Москва1954
4. Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», 1986г. №5
М.Р. Либерзон «Вспомогательный куб»
6. Гусев В. А. и др. Практикум по элементарной математике:
Геометрия: Учеб. Пособие для студентов физ.- мат. Спец. Пед. Ин-тов и учителей ⁄ В. А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович.
- 2 изд., перераб. И доп. – М.: Просвещение, 1992.